CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”

Ediţia a XII-a, Brăila, 8-9.12.2017

BAREM

Clasa a IX a

1. Determinaţi $S_n=\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}],\ n\geq 1.$

Prof. Roxandra Murea, Brăila

***Soluţie*:**

$$S_n=[\sqrt{n^2}]+\sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1}[\sqrt{k}]+\sum_{k=(n-2)^2}^{(n-1)^2-1}[\sqrt{k}]+...+\sum_{k=1^2}^{2^2-1}[\sqrt{k}].(3p)$$

$$S_n=1\left[\left(2^2-1-1^2\right)+1\right]+2\left[\left(3^2-1-2^2\right)+1\right]+...+(n-1)\left\{\left[n^2-1-(n-1)^2\right]+1\right\}+n=\quad(2p)$$

$$=1\left(2^2-1^2\right)+2\left(3^2-2^2\right)+...+(n-1)\left[n^2-(n-1)^2\right]+n\overset{(1p)}{=}n+\sum_{i=1}^{n}(i-1)(2i-1)=\frac{n\left(4n^2-3n+5\right)}{6}.(1p)$$

2. Fie $\Delta ABC, M\in(BC), N\in(AC), P\in(AB)$, astfel încât $\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\frac{MB}{MC}=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\frac{NC}{NA}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{PA}{PB}=1,$

unde a,b,c sunt lungimile laturilor ΔABC.

a) Demonstraţi că dreptele AM, BN, CP sunt concurente într-un punct K.

b) Notăm cu I centrul cercului înscris în ΔABC. Dacă punctele K şi I coincid, demonstraţi că ΔABC este echilateral.

Profesori Gheorghe Alexe şi George-Florin Şerban, Brăila

***Soluţie*:**

a) $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}=1.(2p)$ Din reciproca Teoremei lui Ceva avem că AM, BN, CP sunt concurente într-un punct $K.(1p)$

b) Dacă punctele K şi I coincid atunci AM, BN, CP sunt bisectoare. $(1p)$ Rezultă în ΔABC,

$\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\overset{(1p)}{\Rightarrow}\frac{c^2}{b^2}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{c}{b}=1\Rightarrow c=b.\,(1p)$ Analog $a=b\Rightarrow\Delta ABC$ este echilateral. $(1p)$

3. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale strict pozitive, $n\geq 2$ Demonstraţi că:

$$\frac{na_1+4}{n^2\left(a_2+a_3+...+a_n\right)}+\frac{na_2+4}{n^2\left(a_1+a_3+...+a_n\right)}+...+\frac{na_n+4}{n^2\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}\geq\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n+4}{(n-1)\left(a_1+a_2+a_3+...+a_n\right)}.$$

Prof. Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluţie*:** Notăm cu $S=a_1+a_2+a_3+...+a_n$. Atunci avem

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+...+\frac{a_n}{S-a_n}=\frac{a_1^2}{a_1S-a_1^2}+\frac{a_2^2}{a_2S-a_2^2}+...+\frac{a_n^2}{a_nS-a_n^2}\geq\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{S^2-\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)}=$$

$$\frac{S^2}{S^2-\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)},\text{din inegalitatea lui Bergstrom.}(2p)\text{ Apoi avem}$$

$$\frac{S^2}{S^2-\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)}\geq\frac{n}{n-1}\overset{(1p)}{\Leftrightarrow}(n-1)S^2\geq nS^2-n\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\Leftrightarrow n\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\geq S^2$$

adevărat din C.B.S..Am arătat,deci,că

$$\frac{na_1}{n^2\left(a_2+a_3+...+a_n\right)}+\frac{na_2}{n^2\left(a_1+a_3+...+a_n\right)}+...+\frac{na_n}{n^2\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}\geq\frac{1}{n-1},(1),(1p).$$

Din inegalitateta mediilor avem

$$\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+...+\frac{1}{S-a_n}\geq\frac{n^2}{S-a_1+S-a_2+...+S-a_n}=\frac{n^2}{(n-1)S}\ ;\ (1p)\text{ deci rezultă că}$$

$$\frac{4}{n^2\left(a_2+a_3+...+a_n\right)}+\frac{4}{n^2\left(a_1+a_3+...+a_n\right)}+...+\frac{4}{n^2\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}\geq\frac{4}{n^2}\frac{n^2}{(n-1)S}=\frac{4}{(n-1)S},(2),(1p)$$

Din (1) şi (2) avem

$$\frac{na_1+4}{n^2\left(a_2+a_3+...+a_n\right)}+\frac{na_2+4}{n^2\left(a_1+a_3+...+a_n\right)}+...+\frac{na_n+4}{n^2\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}\geq\frac{1}{n-1}+\frac{4}{(n-1)S}=$$

$$=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n+4}{(n-1)\left(a_1+a_2+a_3+...+a_n\right)}.(1p)$$